САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Щиголев Владимир Викторович

ПРАВИЛА ВЕТВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ И ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург 2013

Работа выполнена на кафедре алгебры Московского педагогического государственного университета.

Официальные оппоненты:	Зубков Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Омский государственный педагогический университет, заведующий кафедрой математического анализа, алгебры и геометрии
	Сергеев Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, профессор
	Скрябин Сергей Маркович, доктор физико-математических наук, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ведущий научный сотрудник
Ведущая организация:	Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения РАН

Защита состоится "___"__________ 201_ г. в __часов на заседании диссертационного совета Д212.232.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199178, Санкт-Петербург, В.О., 10-я линия, дом 33-35, аудитория 74.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан "___"__________ 20__ г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 212.232.29
доктор физ.-мат. наук, профессор Нежинский В. М.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория представлений симметрической группы S_n занимает совершенно особое место в теории представлений конечных групп. Над полями нулевой характеристики эта теория позволяет получить полную классификацию представлений: каждое представление группы S_n полупросто, неприводимые представления группы S_n соответствуют разбиениям числа n и их размерности вычисляются по формуле крюков [13]. С другой стороны, эта теория в случае положительной характеристики основного поля далека от завершения. Так например, даже размерности неприводимых S_n-модулей неизвестны.

Для развития модулярной (то есть над полями положительной характеристики) теории представлений группы S_n необходимо понять, чем эта группа выделяется среди конечных групп. Один из ответов на этот вопрос получил И. Шур в своей диссертации [45], в которой он построил теорию представлений полной линейной группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ на основе открытых до этого Г. Фробениусом комплексных характеров симметрической группы [28]. Позже Дж. А. Грин [30] вернулся к этому вопросу и обратил рассуждения И. Шура, построив неприводимые представления симметрической группы из неприводимых представлений полной линейной группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ над произвольным алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$. При этом неприводимые S_n-модули получаются как образы неприводимых рациональных $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-модулей под действием функтора Шура. Так как последние модули однозначно определяются своими старшими весами, то функтор Шура позволяет получить также параметризацию неприводимых S_n-модулей: каждый неприводимый S_n-модуль изоморфен ровно одному модулю D^λ, где λ — p-регулярное (то есть не содержащее p или более одинаковых частей) разбиение. Такой подход к построению неприводимых S_n-модулей проще чем подход, изложенный в книге Г. Джеймса [13], который не выходит за рамки представлений группы S_n, а также позволяет получить некоторые результаты в неё не входящие, например, теорему о удалении столбца и строки из матрицы разложения [33].

На применении функтора Шура основана также модулярная теория ветвления для симметрической группы, развитая А. С. Клещёвым [34] и [35]. Напомним, что для основного поля нулевой характеристики, правила ветвления позволяют разложить ограничение $D^\lambda{\downarrow_{S_{n-1}}}$ неприводимого S_n-модуля D^λ в прямую сумму неприводимых S_{n-1}-подмодулей. Напротив, в случае основного поля характеристики $p > 0$ ограничение $D^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}$ не обязательно полупросто: оно распадается в прямую сумму неразложимых S_{n-1} модулей, цоколь которых изоморфен в точности одному неприводимому S_{n-1}-модулю [35]. Информация о цоколе оказывается значительно более полезной, чем может сначала показаться. Например, на её основе Б. Фордом и А. С. Клещёвым [27] была доказана гипотеза Муллино [43] о том, как устроена биекция на множестве p-регулярных разбиений $\lambda \mapsto \mu$, где $D^\mu \cong D^\lambda \otimes \mathrm{sgn}$ (здесь sgn — знакопеременное представление группы S_n). Кроме того, эти правила ветвления позволяют вычислять Ext^1-пространства между некоторыми простыми S_n-модулями: А. С. Клещёвым и Дж. Шесом [38], [39] вычислены пространства $\mathrm{Ext}^1_{S_n}(D^\lambda, D^\mu)$, где λ и μ — разбиения, состоящие не более чем из двух ненулевых частей; Д. Хеммер [31] вычислил $\mathrm{Ext}^1_{S_n}(D^\lambda, D^\mu)$, где D^λ и D^μ — вполне расщепимые модули (то есть такие, что их ограничение на любую подгруппу Юнга полупросто); автор в работах [3] и [4] вычислил $\mathrm{Ext}^1_{S_n}(D^\lambda, D^\mu)$ для случая, когда D^λ — вполне расщепляемый модуль и $\lambda \not\trianglerighteq \mu$ ($\lambda \vartriangleright \mu$ обозначает, что $\sum_{i=1}^k \lambda_i \geqslant \sum_{i=1}^k \mu_i$ для любого k и хоты бы одно неравенство строгое). При этом утверждение о том, что D^λ — вполне расщепляемый модуль, имеет вполне чёткий комбинаторный смысл [37] в терминах разбиения λ. В частности, результат работ автора [3] и [4] позволяет утверждать, что радикал модуля Шпехта S^λ такого, что $D^\lambda \cong \operatorname{head} S^\lambda$ — вполне расщепляемый модуль (где λ — p-регулярное разбиение), либо нулевой либо содержит единственный наибольший подмодуль. В последнем случае фактор $D^{\tilde{\lambda}}$ по этому подмодулю явно вычислен (см. лемму 4.5 и теорему 4.6 из работы автора [4]). Наконец, упомянутые выше работы [38], [39] и работа автора [6] содержат версии этих результатов для линейных групп. В работе автора [2] показано, что Ext^1-пространства между неприводимыми S_n-модулями связаны с правилами умножения наклонных модулей (fusion rules for tilting modules) при помощи дуальности Шура-Вейля. Правила умножения, которые используются в работе [2], содержаться в работах О. Матьё [42] и К. Эрдманн [26]. Информация об упомянутых выше Ext^1-пространствах может быть использована в различных приложениях, например, в задаче из работы автора [1] о возможности задать все неприводимые модули множества $\{D^{\lambda+(i^n)} \mid i \in \mathbb{N}\}$, где λ — разбиение высоты менее p и $n < p$, конечным количеством соотношений.

Возможно, ещё более важным следствием модулярных правил ветвления является возможность задать параметризацию неприводимых линейных представлений группы S_n, определив их по сути при помощи этих правил [36]. Известны три способа показать, что последняя параметризация и параметризация, происходящая из функтора Шура, совпадают. Первый способ принадлежит А. С. Клещёву [36]. Второй способ описан в работе С. Арики [18]. Он опирается на теорему категорификации С. Арики [16] и редукцию по модулю p. Третий способ [16] также опирается на теорему категорификации С. Арики, а также на идею экстремального веса [23].

Всё сказанное выше в равной степени применимо к проективным представлениям симметрической группы, за исключением правил ветвления. Изучение проективных представлений симметрической группы S_n эквивалентно либо изучению линейных представлений либо в случае, когда $n \geqslant 4$ и характеристика основного поля отлична от двух, изучению представлений алгебры $\mathcal{T}_n$, порождённой элементами $t_1, \dots, t_n$ и заданной соотношениями

$$t_i^2 = 1, \quad t_i t_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i t_{i+1}, \quad t_i t_j = -t_j t_i,$$

где $i, j = 1, \dots, n-1$ и $|i - j| > 1$. Удобно считать, что эта алгебра задана при любом $n \geqslant 1$ и является супералгеброй с градуировкой, в которой все порождающие $t_1, \dots, t_n$ нечётные.

Естественно пытаться задать неприводимые $\mathcal{T}_n$-супермодули установив связь с представлениями некоторого геометрического объекта. В случае линейных представлений таким объектом была группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Для $\mathcal{T}_n$-супермодулей таким объектом является супергруппа $Q(n)$, которую мы понимаем как следующий функтор из категории $\mathfrak{salg}_{\mathbb{F}}$ коммутативных $\mathbb{F}$-супералгебр в категорию групп [32]:

$$A_{\mathfrak{o}} \oplus A_{\mathfrak{1}} \mapsto \left\{ \left(\begin{array}{c|c} S & S' \\ \hline -S' & S \end{array} \right) \in \mathrm{GL}_{2n}(A_{\mathfrak{o}} \oplus A_{\mathfrak{1}}) \;\middle|\; S \in \mathrm{M}_n(A_{\mathfrak{o}}) \text{ и } S' \in \mathrm{M}_n(A_{\mathfrak{1}}) \right\}.$$

Неприводимые полиномиальные $Q(n)$-супермодули $L(\lambda)$ степени n с p-ограниченным старшим весом λ отображаются при помощи функтора Шура в неприводимые $\mathcal{Y}_n$-супермодули $D(\lambda)$, где $\mathcal{Y}_n = \mathcal{T}_n \otimes \mathcal{C}_n$ и $\mathcal{C}_n$ — супералгебра Клиффорда [21]. Для получения неприводимых $\mathcal{T}_n$-супермодулей требуется дополнительное усилие: функторы $\mathfrak{F}_n$ и $\mathfrak{G}_n$ позволяют получить все (с точностью до изоморфизма) неприводимые $\mathcal{T}_n$-супермодули D^λ из уже построенных неприводимых $\mathcal{Y}_n$-супермодулей $D(\lambda)$, а так же проследить за тем, какие из полученных супермодулей остаются неприводимыми, если забыть про $\mathbb{Z}_2$-градуировки и рассмотреть их как обычные модули. Аналогичный процесс применим к построению супермодулей Шпехта S^λ для супералгебры $\mathcal{T}_n$.

Заметим, что в части II работы [36] на основе наперёд заданных правил ветвления построена совершенно другая система неприводимых $\mathcal{T}_n$-супермодулей G^λ. Однако эквивалентность $D^\lambda \cong G^\lambda$ до последнего времени не была доказана (за исключением случая $\mathbb{F} = \mathbb{C}$), и фактически существовала ситуация, в которой некоторые результаты [21], [24] относились к супермодулям D^λ, в то время как другие результаты [20], [36], [40], [23], [22], [44], [17] относились к супермодулям G^λ (обозначения этих работ не должны вводить в заблуждение: неприводимые $\mathcal{T}_n$-супермодули обычно обозначаются через $D(\lambda)$ во всех этих работах независимо от способа определения).

В отличии от случая полей положительной характеристики, в случае (алгебраически замкнутых) полей нулевой характеристики проблема ветвления для алгебраических групп (и алгебр Ли) напротив изучена очень хорошо. Правила ветвления для ограничений с $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ на $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$, с $\mathrm{Spin}_n(\mathbb{C})$ на $\mathrm{Spin}_{n-1}(\mathbb{C})$ и с $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$ на $\mathrm{Sp}_{n-1}(\mathbb{C})$ доказаны в книге Д. П. Желобенко [14]. Элементарное изложение правил ветвления для этих ограничений содержится в книге Н. Р. Гудмана и Р. Уаллаха [29]. Опубликованы обширные таблицы правил ветвления для классических и исключительных алгебр Ли, смотрите работы Ж. Титса [46], М. Р. Бремнера, Р. В. Муди и Дж. Патера [19] и У. МакКей и Дж. Патера [41].

Для полей положительной характеристики можно рассмотреть проблемы ветвления для аналогичных пар подгрупп. Однако в общем виде в настоящее время все они далеки от решения. Более реалистичной представляется задача вычисления цоколя таких ограничений. Наиболее изученной является пара подгрупп $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F}) < \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. А. С. Клещёвым [35] были найдены компоненты цоколя ограничения $L(\lambda)\downarrow_{\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F})}$ неприводимого $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-модуля со старшим весом $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, имеющие вид $L(\mu)$, где $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_{n-1})$ для некоторого i. Фактически этот результат следует из решенной в той же работе проблемы нахождения $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F})$-примитивных векторов в $L(\lambda)$, имеющих вес того же вида. Нахождение именно таких компонент цоколей — это все, что необходимо для нахождения цоколей ограничений линейных неприводимых представлений симметрической группы S_n на подгруппу S_{n-1}.

Цель работы. Исследование проективных представлений симметрической группы над полями характеристики отличной от 2; получение правил ветвления для проективных представлений группы S_n при ограничении на S_{n-1}; доказательство совпадения геометрической и кристаллической параметризаций проективных представлений группы S_n; вычисление некоторых правил ветвлений для линейных рациональных представлений группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ при ограничении на $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F})$, относящихся к уровням больше единицы; разработка критерия неравенства нулю элементов модулей Вейля и построение при его помощи ненулевых гомоморфизмов между этими модулями. Кроме того, одной из целей диссертации является дальнейшее развитие техники понижающих операторов на случай проективных представлений и на случай старших уровней, а так же развитие комбинаторики, связанной с этими операторами.

Методы исследования. В работе используются методы теории представлений аффинных алгебраических групп и алгебр Ли, коммутативной алгебры и комбинаторики упорядоченных множеств и таблиц Юнга.

Основные результаты. В работе получены следующие результаты:

1. Получен комбинаторный критерий, для каждого доминантного веса $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, индекса $i = 1, \dots, n-1$ и числа $d = 1, \dots, p-1$ позволяющий выяснить, существует ли ненулевой $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F})$-примитивный вектор веса $(\lambda_1, \dots \lambda_{i-1}, \lambda_i - d, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{n-1})$ в неприводимом рациональном $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-модуле со старшим весом λ, где $p = \operatorname{char} \mathbb{F} > 0$.

2. Вычислен цоколь ограничения на подгруппу S_{n-1} неприводимого проективного представления D^λ группы S_n, полученного из неприводимого $Q(n)$-супермодуля со старшим весом λ применением функтора Шура. Кроме того, на основание этого результата (точнее его версии для супермодулей) доказана эквивалентность $D^\lambda \cong G^\lambda$, где G^λ — супермодуль полученный при помощи кристаллических графов. Дополнительно, получается интерпретация понятия нормальной клетки в проективном случае с точки зрения теории представлений. Эти результаты получены автором совместно с А. С. Клещёвым.

3. Получен алгоритм, позволяющий выяснить отличен ли от нуля произвольный вектор v веса μ модуля Вейля над группой $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$. Этот алгоритм не использует базисов и предполагает пошаговое поднятие пары (v, μ). Аналоги этого алгоритма для полупростых односвязных групп произвольного типа доказаны в одну сторону, позволяющую утверждать отличие от нуля рассматриваемого вектора. Построены примеры,

демонстрирующие применение последнего утверждения для построения ненулевых гомоморфизмов между модулями Вейля.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её результаты и методы могут быть использованы в исследованиях по теории представлений.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на алгебраическом семинаре в институте математики Национальной академии наук Белоруссии, на научно исследовательских семинарах кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ, на математическом семинаре университета Орегона, на математических семинарах университетов имени Бар-Илана и Еврейского университета в Иерусалиме, на алгебраическом семинаре имени Д.К.Фаддеева в Санкт-Петербургском отделении Математического института имени В.А.Стеклова, а также на следующих международных и российских конференциях:

1. Международная алгебраическая конференция, посвященная 250-летию Московского государственного университета и 75-летию кафедры высшей алгебры (Москва, 2004).

2. Пятая международная алгебраическая конференция на Украине (Украина, Одесса, 2005).

3. Международная алгебраическая конференция (Екатеринбург, 2005).

4. Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию Д. К. Фаддеева (Санкт-Петербург, 2007).

5. Десятая белорусская математическая конференция (Белоруссия, Минск, 2008).

6. Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию А. Г. Куроша (Москва, 2008).

7. Workshop on Representations and Cohomology (Германия, Кёльн, 2009).

8. Международная алгебраическая конференция “Дискретная математика, алгебра и их приложения” (Белоруссия, Минск, 2009).

9. Международная конференция по алгебре и геометрии (Екатеринбург, 2011).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[11]. Работы [1]–[11] опубликованы в изданиях, входящих в список, рекомендованный Высшей аттестационной комиссией на момент публикации. В совместной работе [11] В.В.Щиголеву принадлежат все вычисления в гиперaлгебре $U_{\mathbb{F}}(n)$ супералгебры $Q(n)$, а А.С.Клещёву применение этих результатов к проективным представлениям симметрической группы.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и четырёх глав. Кроме того, имеется список обозначений и предметный указатель. Текст диссертации изложен на 308 страницах. Список литературы содержит 75 наименований.

Содержание работы

Во **введении** излагается история решаемых задач, обосновывается актуальность темы исследования, кратко описывается содержание работы и формулируются основные результаты.

В разделе **обозначения** фиксируются некоторые обозначения, общие для всех глав диссертации.

Глава 0 является вводной и не содержит новых результатов. Основными объектами, рассмотренными в этой главе, являются категории $\mathrm{Rat}_{\mathbb{F}}(n)$ рациональных $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-модулей и категория $\mathrm{Int}_{\mathbb{F}}(n)$ целых $U_{\mathbb{F}}(n)$-модулей, где $U_{\mathbb{F}}(n)$ — гиперaлгебра (алгебры распределений) общей линейной группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Основной целью этой главы является доказательство эквивалентности этих категорий путём построения функторов $\mathcal{F} : \mathrm{Int}_{\mathbb{F}}(n) \to \mathrm{Rat}_{\mathbb{F}}(n)$ и $\mathcal{G} : \mathrm{Rat}_{\mathbb{F}}(n) \to \mathrm{Int}_{\mathbb{F}}(n)$. В этой главе доказывается тождественность композиций $\mathcal{GF}$ и $\mathcal{FG}$. Построение функтора $\mathcal{G}$ является достаточно стандартным. Для этого используется этого понятия коалгебр и комодулей, а также некоторые $\mathbb{Z}$-формы для перенесения результатов со случая поля комплексных чисел на случай произвольного алгебраически замкнутого поля. С другой стороны, функтор $\mathcal{F}$ строится на основании комбинаторной проверки определяющих соотношений для группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Для этой проверки используются различные преобразования сумм и соотношения между биномиальными коэффициентами (см. определения и тождества из [12]). После того, как введено действие группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ на данном целом $U_{\mathbb{F}}(n)$-модуле, остаётся проверить рациональность такого действия. Это проделано на основании конструкций, приведённых в [15].

В **главе 1** строится двумерный аналог теории нормальных и хороших клеток, построенной А. С. Клещёвым [35]. Естественным образом, вместо множества целых чисел $\mathbb{Z}$ с обычным порядком $<$ возникает целочисленная плоскость $\mathbb{Z}^2$ со следующим (строгим) порядком: $(a,b)\dot{<}(x,y)$ тогда и только тогда, когда $a<x$ и $b<y$. Отображение $\varphi : A \to B$, где $A, B \subset \mathbb{Z}^2$, называется *строго уменьшающим*, если $\varphi(\alpha) \dot{<} \alpha$ для любой точки $\alpha \in A$. Возникающей геометрии целочисленной плоскости посвящён **раздел 1.4.**

Основной результат этой главы состоит в следующем:

Теорема 1.0.2.2. *Пусть* $\mathbb{F}$ *— алгебраически замкнутое поле характеристики* $p>0$*,* λ *— доминантный вес группы* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$*,* $1 \leqslant i < n$ *и* $1 \leqslant d < p$*. Неприводимый* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$*-модуль* $L(\lambda)$ *со старшим весом* λ *содержит ненулевой* $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F})$*-примитивный вектор веса* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - d, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_{n-1})$ *тогда и только тогда, когда для любого подмножества*

$$\Delta \subset \{(t,h) \in \{i+1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, d\} \mid t - i + \lambda_i - \lambda_t - h \equiv 0 \pmod p\},$$

точки которого несравнимы относительно $\dot{<}$*, существует строго уменьшающее вложение из* Δ *в* $\{(s,0) \mid s \in \mathbb{Z}, i<s<n, s-i+\lambda_i-\lambda_s \equiv 0 \pmod p\}$*.*

Доказательство этой теоремы построено на определении соответствующих понижающих операторов $\mathcal{T}^{(d)}_{i,n,M}(I)$, которые являются элементами отрицательной части $U^-_{\mathbb{F}}(n)$ гипер興алгебры, описанной в главе 0. Эти операторы в свою очередь строятся сначала в целочисленной версии $U_{\mathbb{Z}}(n)$ гипералгебры $U_{\mathbb{F}}(n)$. Этому построению посвящены **разделы 1.2, 1.3 и 1.5**, в которых вычисляется действие слева порождающих E_l (матричных единиц) положительной части $U^+_{\mathbb{Z}}(n)$ гипералгебры $U_{\mathbb{Z}}(n)$ на рассматриваемые понижающие операторы по модулю идеала $U_{\mathbb{Z}}(n)E_l$.

Результаты этих вычислений после замены кольца скаляров на поле произвольной характеристики $\mathbb{F}$, позволяют, с одной стороны, построить достаточное для доказательства теоремы 1.0.2.2 множество $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F})$-примитивных векторов простого $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-модуля $L(\lambda)$ старшего веса λ. Все эти векторы имеют вид $\mathcal{T}^{(d)}_{i,n,M}(\varnothing)v^+$, где v^+ — старший вектор модуля $L(\lambda)$. С другой стороны, эти же операторы $\mathcal{T}^{(d)}_{i,n,M}(I)$ позволяют доказать, что других $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F})$-примитивных векторов веса $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - d, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_{n-1})$ в модуле $L(\lambda)$ нет, чем завершается доказательство теоремы 1.0.2.2. Эти конструкции изложены в **разделе 1.6.**

В **главе 2** доказываются правила ветвления для неприводимых проективных представлений симметрической группы над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики отличной от 2. При этом в

разделе 2.1.1 объясняется почему такие представления, не являющиеся проективизацией линейных, сводятся к модулям над скрученной групповой алгеброй $\mathcal{T}_n$ с порождающими $t_1, \ldots, t_{n-1}$ и соотношениями

$$t_i^2 = 1, \quad t_i t_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i t_{i+1}, \quad t_i t_j = -t_j t_i, \text{ где } |i-j| > 1,$$

а так же почему удобно рассматривать эту алгебру как супералгебру и изучать сначала супермодули над ней.

Параметризация таких супермодулей $\lambda \mapsto D^\lambda$ считается происходящий (при помощи функтора Шура) из параметризации неприводимых $Q(n)$-супермодулей $L(\lambda)$ при помощи своего старшего веса λ. Основным результатом для таких супермодулей является **теорема 2.7.2.1**, представляющая собой критерий существования ненулевого $Q(n-1)$-примитивного вектора веса вида $\mu = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_{n-1})$ в супермодуле $L(\lambda)$, и **теорема 2.7.3.3**, представляющая собой критерий существования неприводимого $Q(n-1)$-подсупермодуля $L(\mu)$ в $L(\lambda)$ для μ такого же как выше вида.

Как и в главе 1 в главе 2 основные результаты достигаются за счёт построения подходящих понижающих операторов. Этому посвящён **раздел 2.2.1.** Необходимые для получения основных результатов свойства этих операторов устанавливаются в **разделах 2.2 – 2.4.**

Проективные нормальные и хорошие клетки, введённые в работе Дж. Брандона и А. С. Клещёва [20] рассматриваются в **разделе 2.8.4.** Эти понятия имеют аналоги для представлений группы $Q(n)$, которые мы определяем в **разделах 2.6.9. и 2.7.3** соответственно. **Лемма 2.7.6.1** показывает, что эти понятия связаны достаточно простым образом. Заметим, что комбинаторика, связанная с понятиями нормальных и хороших клеток и индексов, основана на комбинаторике последовательностей из $+$ и $-$, которой посвящён **раздел 2.5.**

Основные результаты для представлений супергруппы $Q(n)$ получены в **разделах 2.6 и 2.7.**

Заключительный **раздел 2.8** посвящён применению полученных результатов для представлений супергруппы $Q(n)$ к проективным представлениям симметрической группы: **теорема 2.8.3.7** показывает чему равняется цоколь (без учёта кратности) ограничения неприводимого $\mathcal{T}_n$-супермодуля D^λ на подалгебру $\mathcal{T}_{n-1}$, а так же когда существует ненулевой гомоморфизм из $\mathcal{T}_{n-1}$-супермодуля Шпехта S^μ в ограничение $D^\lambda{\downarrow_{\mathcal{T}_{n-1}}}$. Последний результат представляет собой ответ на вопрос об интерпретации проективных нормальных клеток с точки зрения теории проективных представлений. Результаты этого раздела позволяют установить изоморфизм $D^\lambda \cong G^\lambda$ неприводимых супермодулей, полученных при помощи функтора Шура и при помощи кристаллических графов.

Наконец, в **разделе 2.8.5** получены правила ветвления для неприводимых $\mathcal{T}_n$-модулей из полученных в этой главе правил ветвления для неприводимых $\mathcal{T}_n$-супермодулей путём игнорирования $\mathbb{Z}_2$-градуировок.

В **главе 3** мы формулируем гипотезы о том, как проверить является ли произвольный вектор v модуля Вейля $\Delta(\omega)$ для односвязной полупростой алгебраической группы G ненулевым без использования базисов. В формулировках этих гипотез участвует не сам вектор, а пара (F,ω), в которой F такой элемент отрицательной части гипералгебры $U_{\mathbb{F}}^-$ группы G, что $v = \mathsf{F}e_\omega^+$. Здесь e_ω^+ обозначает фиксированный ненулевой вектор модуля Вейля $\Delta(\omega)$ веса ω. Согласно **гипотезе A** (**гипотезе B**), для проверки неравенства $v \neq 0$ требуется привести пару (F,ω) к паре вида $(c,0)$, где c — ненулевой элемент поля, следующими преобразованиями ($m = 1$ для гипотезы B):

(a) $(\mathsf{F},\omega) \mapsto (\mathrm{r}_{\alpha,m}^\omega(\mathsf{F}),\omega)$, где α — простой корень и m — натуральное число;

(b) $(\mathsf{F},\omega) \mapsto (\mathsf{F},\omega-\delta)$, где веса δ и $\omega-\delta$ доминантные.

В этих преобразованиях $\mathrm{r}_{\alpha,m}^\omega(\mathsf{F})$ обозначает такой элемент $U_{\mathbb{F}}^-$, что $\mathsf{X}_\alpha^{(m)}\mathsf{F} \equiv \mathrm{r}_{\alpha,m}^\omega(\mathsf{F})$ по модулю левого идеала гипералебры группы G, порождённого разделёнными степенями $\mathsf{X}_\beta^{(k)}$ для простых корней β и целых $k > 0$ вместе со всеми соотношениями, определяющими вес ω. Элемент $\mathrm{r}_{\alpha,m}^\omega(\mathsf{F})$ легко вычислить, зная F, что продемонстрировано примерами. **Следствие 3.1.2.2** показывает, что если такое преобразование возможно, то $v \neq 0$. Более того, **теорема 3.2.7.3** доказывает обе гипотезы для случая полной линейной группы.

В целом полученный алгоритм похож на аналогичный алгоритм для неприводимых модулей, который неоднократно использовался в главах 1 и 2, и может быть использован, например, для построения ненулевых гомоморфизмов между модулями Вейля для любых типов групп, а не только для типа A_n как теорема Картера-Пейна [25]. Соответствующие примеры приведены в **разделах 3.1.5 и 3.1.6.**

Для облегчения чтения диссертация содержит **список обозначений** (общий и по главам) и **предметный указатель.**

Публикации автора по теме диссертации

[1] Shchigolev V.V. On the stabilization problem for submodules of Specht modules // J. Algebra, 251 (2002), n. 2, 790–812.

[2] Щиголев В.В. Конечная базируемость некоторых классов неприводимых представлений симметрических групп // Матем. сб., 194 (2003), n. 3, 149–160

[3] Щиголев В. В. О некоторых расширениях вполне расщепляемых модулей // Известия РАН, Сер. матем., 68 (2004), n. 4, 131–150.

[4] Щиголев В. В. О расширениях и правилах ветвления модулей близких к вполне расщепляемым // Матем. сб., 196 (2005), n. 8, 119–160.

[5] Shchigolev V.V. Iterating lowering operators // J. Pure Appl. Algebra, 206 (2006), 111–122.

[6] Shchigolev V.V. On some extensions of p**-restricted completely splittable GL(n)-modules // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 142, No. 2, 2007, 2015–2019.**

[7] Shchigolev V.V. Generalization of modular lowering operators for GL_n**, // Comm. Algebra, 36 (2008), n. 4, 1250–1288.**

[8] Shchigolev V.V. Rectangular low level case of modular branching problem for $\mathrm{GL}_n(K)$ **// J. Algebra, 321 (2009), n. 1, 28–85.**

[9] Shchigolev V.V. A local criterion for Weyl modules for groups of type A // J. Pure Appl. Algebra, 213 (2009), n. 9, 1681–1701.

[10] Shchigolev V.V. Weyl submodules in restrictions of simple modules // J. Algebra, 321 (2009), 1453–1462.

[11] Kleshchev A., Shchigolev V. Modular Branching Rules for Projective Representations of Symmetric Groups and Lowering Operators for the Supergroup $\mathrm{Q}(n)$ // Memoirs of the AMS, 220 (2012), n. 1034.

Цитированная литература

[12] Грехем Р., Кнут Д. Паташник О. Конкретная математика // Мир, М., 1998.

[13] Джеймс Г. Теория представлений симметрической группы // Мир, М., 1980.

[14] Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления // Наука, Москва, 1970.

[15] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле // М., 1975.

[16] Ariki S. On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m, 1, n)$ // J. Math. Kyoto Univ., **36** (1996), 789–808.

[17] Arisha H., Schaps M. Maximal strings in the crystal graph of spin representations of the symmetric and alternating groups // Comm. Algebra, **37** (2009), 3779–3795.

[18] Ariki S. Proof of the modular branching rule for cyclotomic Hecke algebras // J. Algebra, **306** (2006), 290–300.

[19] Bremner M. R., Moody R. V., Patera J. , Tables of Dominant Weight Multiplicities for Representations of Simple Lie Algebras // Monographs and Textbooks in Pure and Appl. Math. **90**, Marcel Dekker, New York, 1985.

[20] Brundan J., Kleshchev A. Hecke-Clifford superalgebras, crystals of type $A_{2\ell}^{(2)}$ and modular branching rules for $\widehat{S}_n$ // Represent. Theory, **5** (2001), 317–403.

[21] Brundan J., Kleshchev A. Projective representations of symmetric groups via Sergeev duality // Math. Z., **239** (2002), 27–68.

[22] Brundan J., Kleshchev A. Cartan determinants and Shapovalov forms // Math. Ann., **324** (2002), 431–449.

[23] Brundan J., Kleshchev A. Representation theory of symmetric groups and their double covers // Groups, Combinatorics & Geometry (Durham, 2001), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2003, 31–53.

[24] Brundan J., Kleshchev A. James' regularization theorem for double covers of symmetric groups // J. Algebra, **306** (2006), 128–137.

[25] Carter R. W., Payne M. T. J. On homomorphisms between Weyl modules and Specht modules // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **87** (1980), 419–425.

[26] Erdmann K. Tensor products and dimensions of simple modules for symmetric groups // Manuscripta Math., **88** (1995), n. 3, 357–386.

[27] Ford B., Kleshchev A. S. A proof of the Mullineux conjecture // Math. Z., **226** (1997), n. 2, 267–308.

[28] Frobenius G. Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe, // Sitz. Berlin Akad. Wiss (1900), 516–534.

[29] Goodman R., Wallach N. R. Symmetry, Representations, and Invariants (Graduate Texts in Mathematics (**255**)) // Springer, 2009.

[30] Green J. A. Polynomial representations of $GL_n(K)$ // Lecture Notes in Mathematics, v. 830, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[31] Hemmer D. J. The Ext^1-quiver for completely splittable representations of the symmetric group // J. Group Theory (2001), n. 4, 401–416.

[32] Jantzen J. C. Representations of algebraic groups, Second Edition (Mathematical Surveys and Monographs 107) // Amer. Math. Soc., 2003.

[33] James G. D. On the Decomposition Matrices of the Symmetric group, III // J. Algebra, **71** (1981), 115–122.

[34] Kleshchev A. S. Branching rules for modular representations of symmetric groups. I // J. Algebra, **178** (1995), n. 2, 493–511.

[35] Kleshchev A. S. Branching rules for modular representations of symmetric groups. II // J. Reine Angew. Math., **459** (1995), 163–212.

[36] Kleshchev A. Linear and Projective Representations of Symmetric Groups // Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[37] Kleshchev A. S. Completely splittable representations of symmetric groups // J. Algebra, **181** (1996), n. 2, 584–592.

[38] Kleshchev A. S., Sheth J. On extensions of simple modules over symmetric and algebraic groups // J.Algebra, **221** (1999), n. 2, 705–722.

[39] Kleshchev A. S., Sheth J. Corrigendum: "On extensions of simple modules over symmetric and algebraic groups" // J.Algebra, **238** (2001), n. 2, 843–844.

[40] Kleshchev A., Tiep P. H. On restrictions of modular spin representations of symmetric and alternating groups // Trans. Amer. Math. Soc., **356** (2004), 1971–1999.

[41] McKay W. G., Patera J. Tables of Dimensions, Indices, and Branching Rules for Representations of Simple Lie Algebras // Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **69**), *Marcel Dekker*, New York, 1981.

[42] Mathieu O. On the dimension of some modular irreducible representations of the symmetric group // Lett. Math. Phys., **38** (1996), n. 1, 23–32.

[43] Mullineux G. Bijections of p-regular partitions and p-modular irreducibles of the symmetric groups // J. London Math. Soc. (2), **20** (1979), n. 1, 60–66.

[44] Phillips A. M. Restricting modular spin representations of symmetric and alternating groups to Young-type subgroups // Proc. London Math. Soc. (3), **89** (2004), 623–654.

[45] Schur I. Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matix zuordnen lassen (1901) // Springer, Berlin, 1973, 1–70.

[46] Tits J., Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen // Lecture Notes in Math. **40**, Springer-Verlag, Berlin, 1967.